　不等式にまつわる問題は解答にあたって様々なアプローチが可能であるが，実際に正解に辿り着く道筋は限られていることが多い．解法の選球眼が重要になる．

**1** $m,\ n$ は正の整数で，$m<n$ とする．$0<x<1$ のとき，$\left(1+\dfrac{x}{m^2}\right)^m$，$\left(1+\dfrac{x}{n^2}\right)^n$ の大小を定めよ．(1977 年)

**2** $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,\ p>0,\ q>0$ のとき，$x \geqq 0$ において $x$ と $\dfrac{1}{p}x^p+\dfrac{1}{q}$ の大小を比較せよ．(1966 年)

**3** $a,\ b$ を正の整数とする．(1984 年)

(1) $c=a+b,\ d=a^2-ab+b^2$ とおくとき，不等式 $1<\dfrac{c^2}{d} \leqq 4$ が成り立つことを示せ．

(2) $a^3+b^3$ が素数の整数乗になる $a,\ b$ を全て求めよ．

**4** 関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ は $|x| \leqq 1$ で $|f(x)| \leqq 1$ を満たしている．このとき，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ について，以下の問いに答えよ．(1988 年)

(1) $|f'(1)| \leqq 4$ を示せ．

(2) $|f'(1)|=4$ となる $f(x)$ をすべて求めよ．

**5** 正の実数 $a,\ b,\ p$ に対して，$A=(a+b)^p$ と $B=2^{p-1}(a^p+b^p)$ の大小関係を調べよ．(1999 年)

**6** $a,\ b$ を正数とするとき，$\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ と $\left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ との大小を比較せよ．(1957 年)