東京科学大（旧東工大）は整数問題の出題率が近年高くなっており，広義の整数問題は直近 5 年間ほぼ毎年出題されている．過去問から難易度を把握しておこう．

1 整数の組 $(a,\ b)$ に対して 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ を考える．方程式 $f(x)=0$ の複素数の範囲のすべての解 α に対して $\alpha^n=1$ となる正の整数 n が存在するような組 $(a,\ b)$ を求めよ．(2024 年)

2 方程式 $(x^3-x)^2(y^3-y)=86400$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．(2023 年)

3 3 つの正の整数 $a,\ b,\ c$ の最大公約数が 1 であるとき，次の問いに答えよ．(2022 年)

(1) $a+b+c,\ bc+ca+ab,\ abc$ の最大公約数は 1 であることを示せ．

(2) $a+b+c,\ a^2+b^2+c^2,\ a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となるような正の整数を全て求めよ．

4 以下の問いに答えよ．(2021 年)

(1) 正の整数 n に対して，二項係数に関する次の等式を示せ．

$$n{}_{2n}\mathrm{C}_n=(n+1){}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

また，これを用いて ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ．

(2) 正の整数 n に対して，$a_n=\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$ とおく．このとき，$n \geqq 4$ ならば $a_n>n+2$ であることを示せ．

5 次の問いに答えよ．(2020 年)

(1) $\left|x^2-x-23\right|$ の値が，3 を法として 2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ．

(2) k 個の連続した正の整数 $x_1,\ \cdots,\ x_k$ に対して，

$$\left|x_j^2-x_j-23\right| \quad (1 \leqq j \leqq k)$$

の値がすべて素数になる k の最大値と，その k に対する連続した正の整数 $x_1,\ \cdots,\ x_k$ をすべて求めよ．
ここで k 個の連続した整数とは，

$$x_1,\ x_1+1,\ x_1+2,\ \cdots,\ x_1+k-1$$

となる列のことである．